

## Моделирование распространения эпидемий

Ю.Ю. Тарасевич

Лаборатория  
«Математическое моделирование и информационные технологии в науке и образовании»,  
Астраханский государственный университет

27 июля 2020 г.

- 1 Введение. Эпидемии, инновации, слухи, паника, ...
- 2 Точечные модели
  - SIR и другие
  - Явный учёт запаздывания
- 3 Распределённые модели
  - Модели с непрерывным пространством
  - Модели с дискретным пространством и временем
    - Модели на регулярных структурах
    - Модели на сложных сетях

- модели распространения эпидемий,

- модели распространения эпидемий,
- модели диффузии инноваций,

- модели распространения эпидемий,
- модели диффузии инноваций,
- модели распространения слухов,

- модели распространения эпидемий,
- модели диффузии инноваций,
- модели распространения слухов,
- модели распространения паники,

- модели распространения эпидемий,
- модели диффузии инноваций,
- модели распространения слухов,
- модели распространения паники,
- модели возбудимых сред.

- модели распространения эпидемий,
- модели диффузии инноваций,
- модели распространения слухов,
- модели распространения паники,
- модели возбудимых сред.

26 июля 2020 г.

[arXiv](#): 446 статей, в название которых входят слова epidemic и modeling

- модели распространения эпидемий,
- модели диффузии инноваций,
- модели распространения слухов,
- модели распространения паники,
- модели возбудимых сред.

26 июля 2020 г.

[arXiv](#): 446 статей, в название которых входят слова epidemic и modeling  
[1764 COVID-19 SARS-CoV-2 preprints from arXiv](#)

- модели распространения эпидемий,
- модели диффузии инноваций,
- модели распространения слухов,
- модели распространения паники,
- модели возбудимых сред.

26 июля 2020 г.

**arXiv:** 446 статей, в название которых входят слова epidemic и modeling  
1764 COVID-19 SARS-CoV-2 preprints from arXiv  
6957 COVID-19 SARS-CoV-2 preprints from medRxiv and bioRxiv

# Восприимчивый — инфицированный — выбывший

Susceptible — Infected — Removal

Kermack W. O., McKendrick A. G. A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics // *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. — 1927. — Vol. 115, no. 772. — P. 700–721.

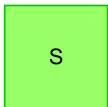
Перепечатка: *Bulletin of Mathematical Biology*. — 1991. — Vol. 53, Iss. 1–2. P. 33–55.

# Восприимчивый — инфицированный — выбывший

Susceptible — Infected — Removal

Kermack W. O., McKendrick A. G. A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics // *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. — 1927. — Vol. 115, no. 772. — P. 700–721.

Перепечатка: *Bulletin of Mathematical Biology*. — 1991. — Vol. 53, Iss. 1–2. P. 33–55.

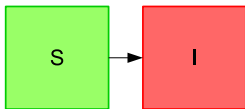


# Восприимчивый — инфицированный — выбывший

Susceptible — Infected — Removal

Kermack W. O., McKendrick A. G. A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics // *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. — 1927. — Vol. 115, no. 772. — P. 700–721.

Перепечатка: *Bulletin of Mathematical Biology*. — 1991. — Vol. 53, Iss. 1–2. P. 33–55.

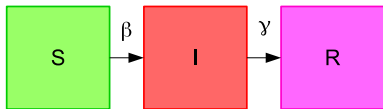


# Восприимчивый — инфицированный — выбывший

Susceptible — Infected — Removal

Kermack W. O., McKendrick A. G. A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics // *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. — 1927. — Vol. 115, no. 772. — P. 700–721.

Перепечатка: *Bulletin of Mathematical Biology*. — 1991. — Vol. 53, Iss. 1–2. P. 33–55.

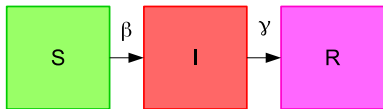


# Восприимчивый — инфицированный — выбывший

Susceptible — Infected — Removal

Kermack W. O., McKendrick A. G. A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics // *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. — 1927. — Vol. 115, no. 772. — P. 700–721.

Перепечатка: *Bulletin of Mathematical Biology*. — 1991. — Vol. 53, Iss. 1–2. P. 33–55.



$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad (1)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \quad (2)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I, \quad (3)$$

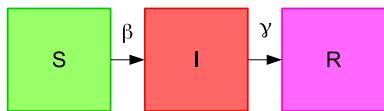
$$S + I + R = 1. \quad (4)$$

# Восприимчивый — инфицированный — выбывший

Susceptible — Infected — Removal

Kermack W. O., McKendrick A. G. A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics // *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. — 1927. — Vol. 115, no. 772. — P. 700–721.

Перепечатка: *Bulletin of Mathematical Biology*. — 1991. — Vol. 53, Iss. 1–2. P. 33–55.

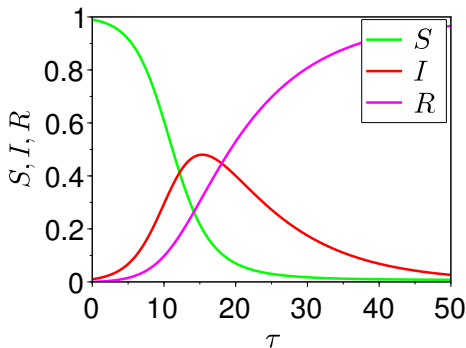


$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad (1)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \quad (2)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I, \quad (3)$$

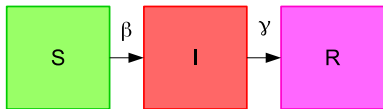
$$S + I + R = 1. \quad (4)$$



# Восприимчивый — инфицированный — выбывший

Susceptible — Infected — Removal

$R_0$  — basic reproduction number (базовый коэффициент воспроизводства инфекции, индекс репродукции, базовое репродуктивное число, базовый показатель репродукции, базовая скорость репродукции, основное репродуктивное число).

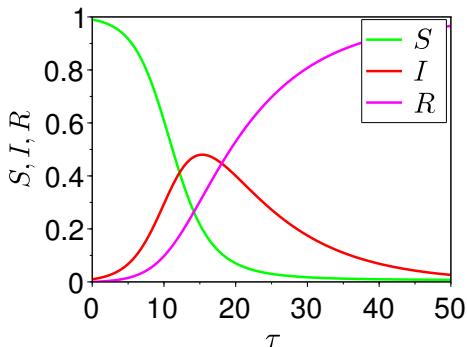


$$\frac{dS}{d\tau} = -R_0SI, \quad (1)$$

$$\frac{dI}{d\tau} = (R_0S - 1)I, \quad (2)$$

$$\frac{dR}{d\tau} = I, \quad (3)$$

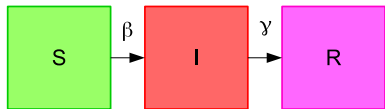
$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma}. \quad (4)$$



# Восприимчивый — инфицированный — выбывший

Susceptible — Infected — Removal

$$I = I(0) \exp([R_0 S(0) - 1]\tau).$$

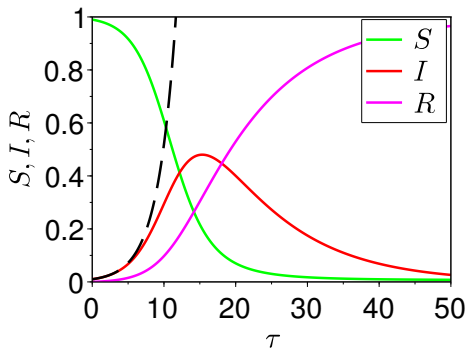


$$\frac{dS}{d\tau} = -R_0 S I, \quad (1)$$

$$\frac{dI}{d\tau} = (R_0 S - 1)I, \quad (2)$$

$$\frac{dR}{d\tau} = I, \quad (3)$$

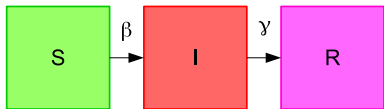
$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma}. \quad (4)$$



# Восприимчивый — инфицированный — выбывший

Susceptible — Infected — Removal

Если  $R_0 < 1$ , то число инфицированных монотонно убывает с течением времени.

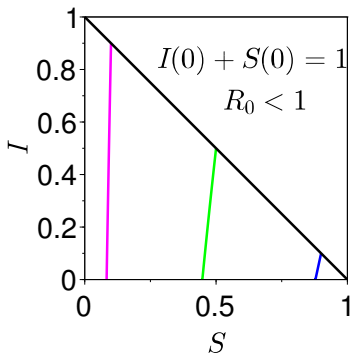


$$\frac{dS}{d\tau} = -R_0 S I, \quad (1)$$

$$\frac{dI}{d\tau} = (R_0 S - 1) I, \quad (2)$$

$$\frac{dR}{d\tau} = I, \quad (3)$$

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma}. \quad (4)$$

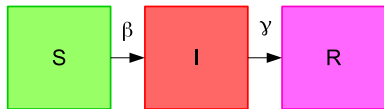


# Восприимчивый — инфицированный — выбывший

Susceptible — Infected — Removal

Если  $R_0 > 1$  и  $S(0) < R_0^{-1}$ , то эпидемия не развивается, доля инфицированных особей с течением времени снижается.

Если  $R_0 > 1$  и  $S(0) > R_0^{-1}$ , то число инфицированных сначала достигает максимума, а потом убывает.

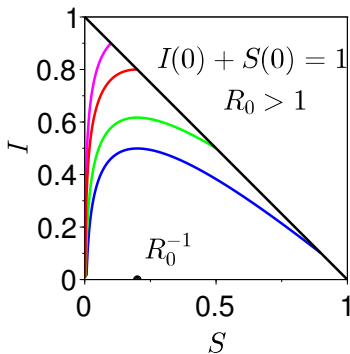


$$\frac{dS}{d\tau} = -R_0 S I, \quad (1)$$

$$\frac{dI}{d\tau} = (R_0 S - 1) I, \quad (2)$$

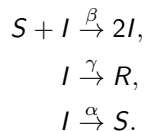
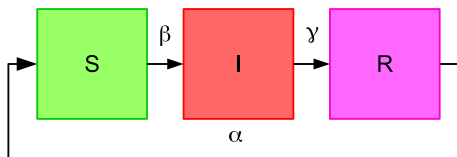
$$\frac{dR}{d\tau} = I, \quad (3)$$

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma}. \quad (4)$$



# SIRS

Восприимчивый — инфицированный — выживший — восприимчивый



HRSV, Респираторно-синцициальный вирус человека

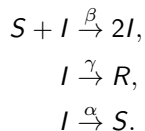
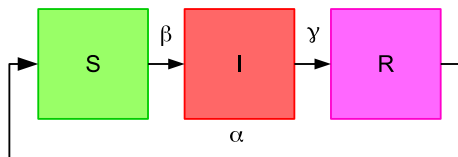
$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \alpha R, \quad (5)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \quad (6)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \alpha R. \quad (7)$$

# SIRS

Восприимчивый — инфицированный — выбывший — восприимчивый



HRSV, Респираторно-синцициальный вирус человека

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \alpha R, \quad (5)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \quad (6)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \alpha R. \quad (7)$$

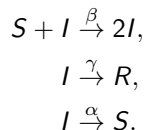
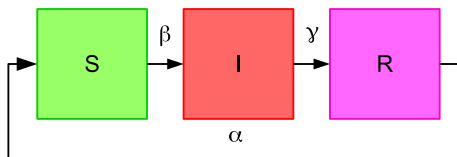
$$\frac{dS}{d\tau} = -R_0 SI + \alpha' R,$$

$$\frac{dI}{d\tau} = (R_0 S - 1)I,$$

$$\frac{dR}{d\tau} = I - \alpha' R.$$

# SIRS

Восприимчивый — инфицированный — выбывший — восприимчивый



HRSV, Респираторно-синцициальный вирус человека

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \alpha R, \quad (5)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \quad (6)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \alpha R. \quad (7)$$

$$\frac{dS}{d\tau} = -R_0 SI + \alpha'(1 - S - I),$$

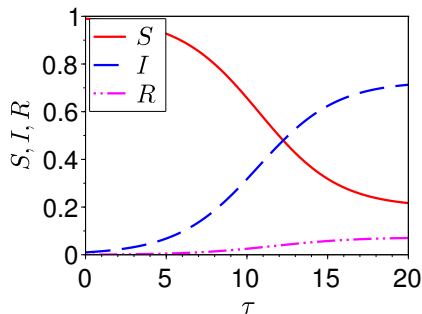
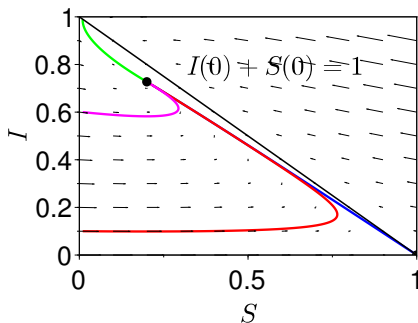
$$\frac{dI}{d\tau} = (R_0 S - 1)I,$$

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma}.$$

# SIRS

Восприимчивый — инфицированный — выживший — восприимчивый

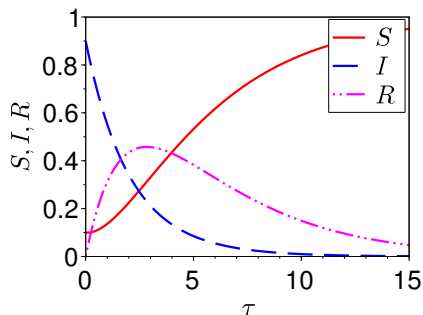
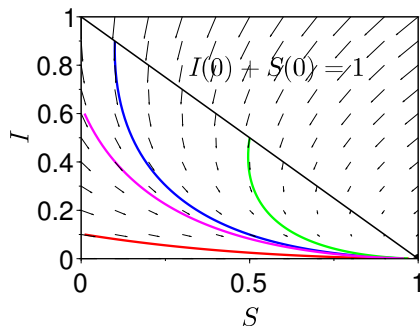
При  $\gamma < \beta$  в системе имеется устойчивый узел с координатами  $I = \frac{\alpha \beta - \gamma}{\beta \alpha + \gamma}$ ,  $S = \frac{\gamma}{\beta}$  и седло с координатами  $I = 0$ ,  $S = 1$ ; при  $t \rightarrow \infty$  в системе стабилизируются доли здоровых и больных индивидов.

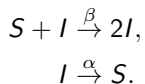
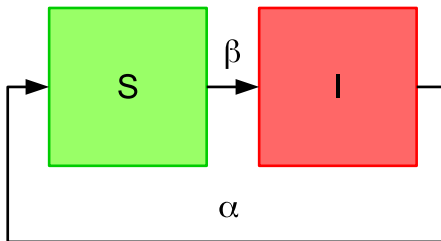


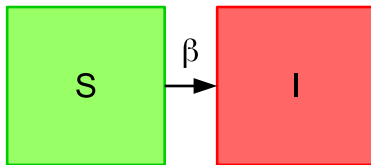
# SIRS

Восприимчивый — инфицированный — выживший — восприимчивый

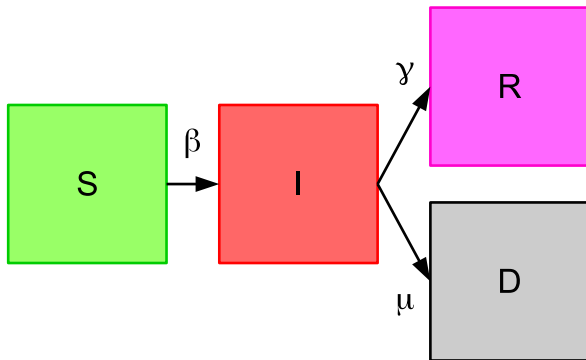
При  $\gamma > \beta$  в системе имеется устойчивый узел с координатами  $I = 0, S = 1$ ;  
при  $t \rightarrow \infty$  все больные выздоравливают.

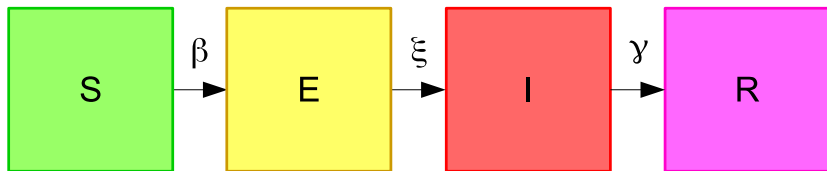






$\alpha = 0$ , герпес



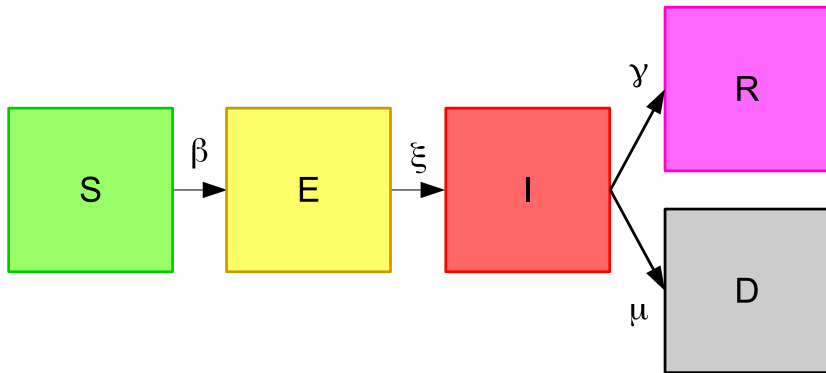


Инфицированный во время инкубационного периода **не заразен**.  
Varicella Zoster (Human herpesvirus 3), ветряная оспа.

$$S + I \xrightarrow{\beta} I + E,$$

$$E \xrightarrow{\xi} I,$$

$$I \xrightarrow{\gamma} R.$$

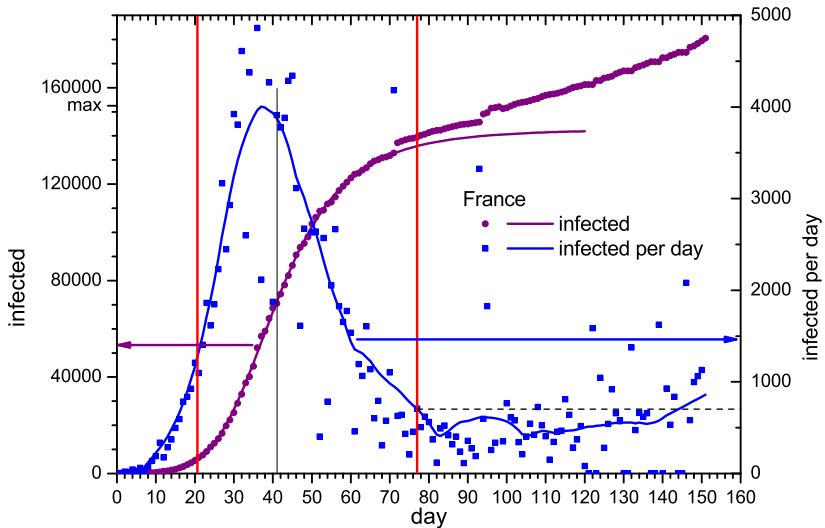


Дополнительно могут учитываться

- изменение размера популяции (смерть, рождение, миграция);
- влияние вакцинации;
- врождённый иммунитет;
- карантин;
- ...

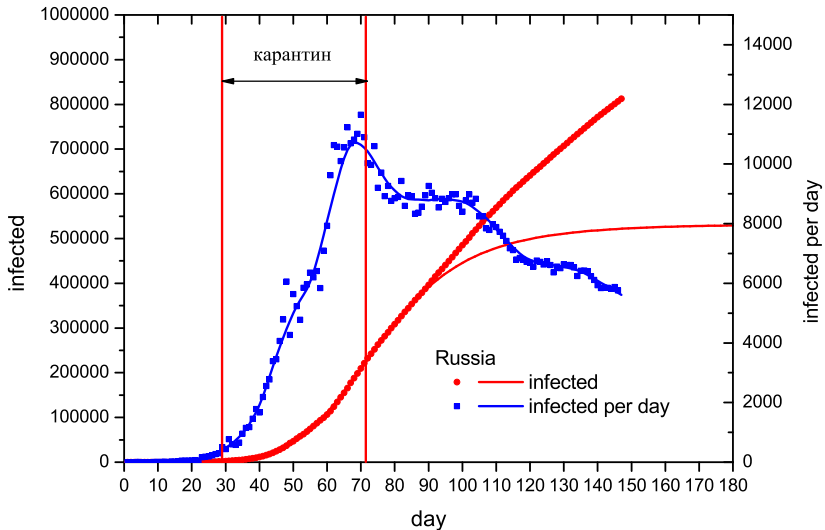
# COVID-19

Франция и Россия



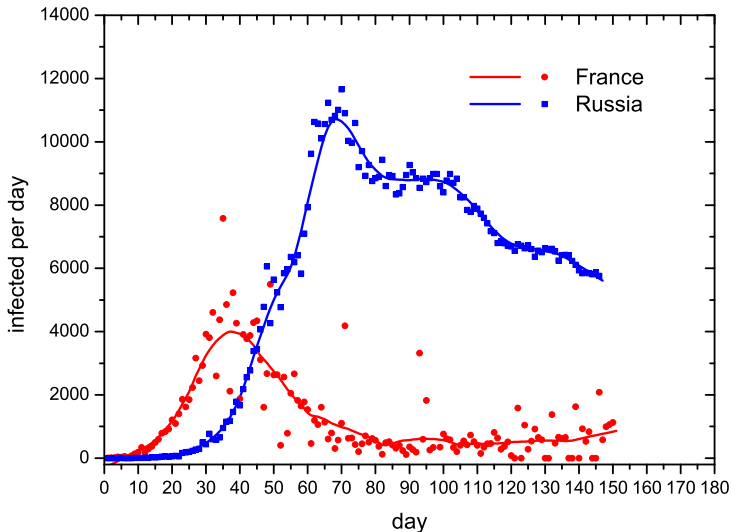
# COVID-19

Франция и Россия



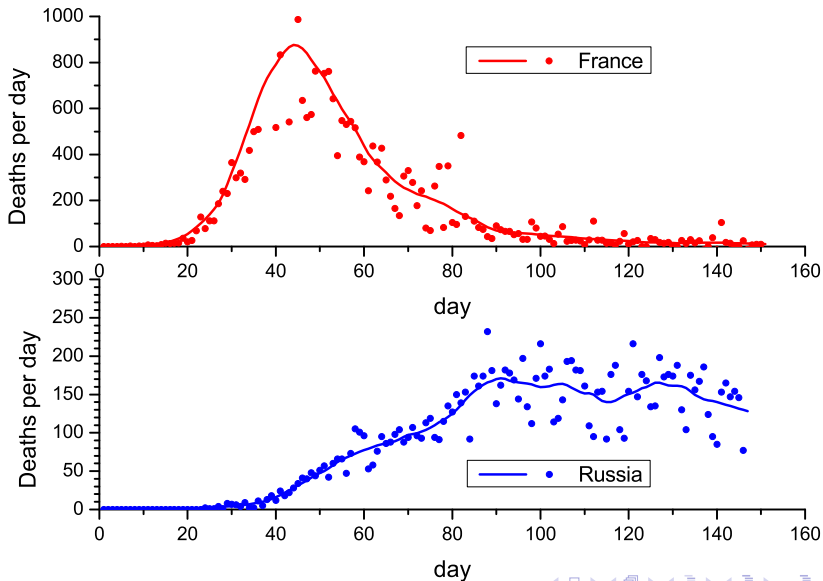
# COVID-19

Франция и Россия

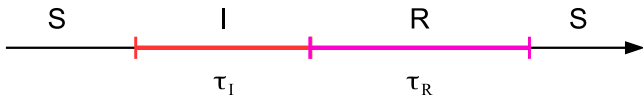


# COVID-19

Франция и Россия



# Влияние запаздывания



$$\tau_0 = \tau_I + \tau_R, \quad (5)$$

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) + \beta S(t - \tau_0)I(t - \tau_0), \quad (6)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \beta S(t - \tau_0)I(t - \tau_0). \quad (7)$$

Gonçaves S., Abramson G., Gomes M. F. C. Oscillations in SIRS model with distributed delays // *The European Physical Journal B.* — 2011. — Vol. 81, no. 3. — P. 363–371.

Могут использоваться дифференциальные уравнения с частными производными.

$$\frac{\partial S}{\partial t} = F(S, I) + D_S \Delta S, \quad (8)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = G(S, I) + D_I \Delta I, \quad (9)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = H(R, I) + D_R \Delta R. \quad (10)$$

Аналог моделей реакция—диффузия.

# Модели с дискретным пространством и временем

Правила перехода: SIRS

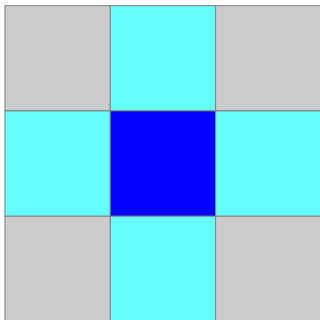
Каждый элемент характеризуется фазой в цикле заболевания

$\Phi_i^n = 0, 1, \dots, \tau_I + \tau_R$ . Эпидемиологическое состояние  $\pi_i$   $i$ -го элемента ( $S$ ,  $I$  или  $R$ ) зависит от фазы следующим образом

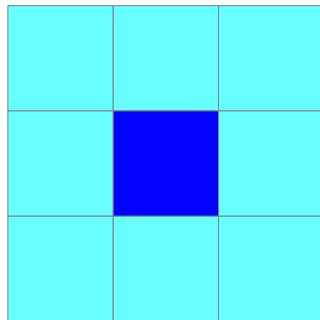
$$\pi_i = \begin{cases} S, & \text{если } \Phi_i^n = 0, \\ I, & \text{если } \Phi_i^n \in [1, \tau_I], \\ R, & \text{если } \Phi_i^n \in [\tau_I + 1, \tau_I + \tau_R]. \end{cases} \quad (11)$$

Состояние  $i$ -го элемента на следующем временном шаге зависит от его текущей фазы в цикле и от эпидемиологического состояния его соседей в сети. Правила эволюции следующие

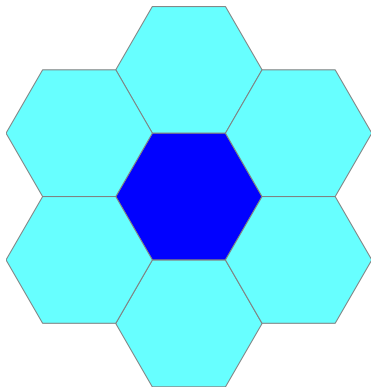
$$\Phi_i^{n+1} = \begin{cases} \Phi_i^n + 1, & \text{если } 0 < \Phi_i^n < \tau_I + \tau_R, \\ 0, & \text{если } \Phi_i^n = \tau_I + \tau_R, \\ 0, & \text{если } \Phi_i^n = 0 \text{ и не произошло инфицирования,} \\ 1, & \text{если } \Phi_i^n = 0 \text{ и } i \text{ инфицирован.} \end{cases} \quad (12)$$



Окрестность фон Неймана

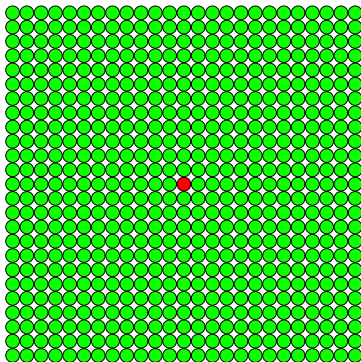


Окрестность Мура



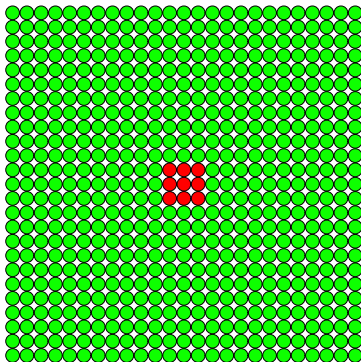
# Детерминированные переходы

Клеточные автоматы



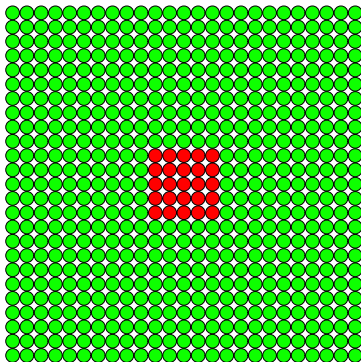
# Детерминированные переходы

Клеточные автоматы



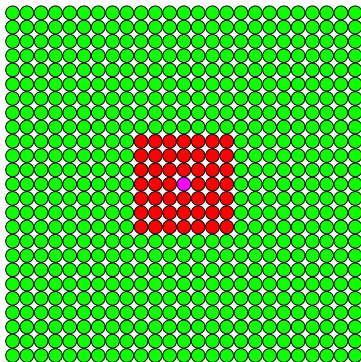
# Детерминированные переходы

Клеточные автоматы



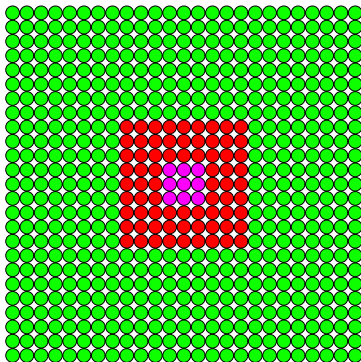
# Детерминированные переходы

## Клеточные автоматы



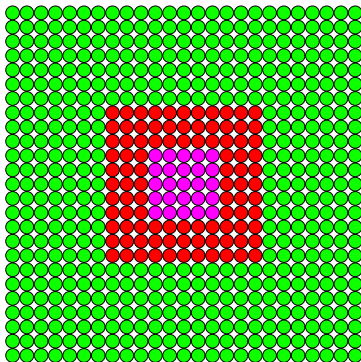
# Детерминированные переходы

## Клеточные автоматы



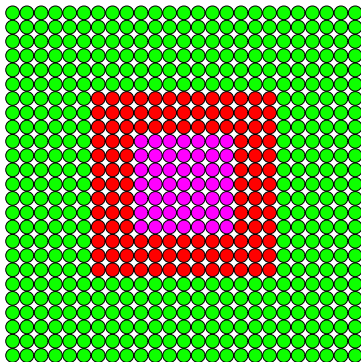
# Детерминированные переходы

Клеточные автоматы



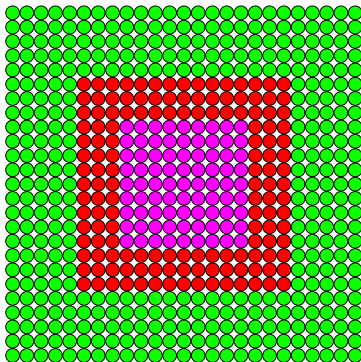
# Детерминированные переходы

Клеточные автоматы



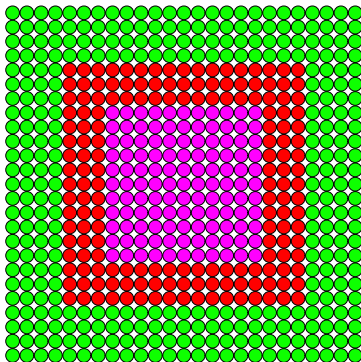
# Детерминированные переходы

Клеточные автоматы



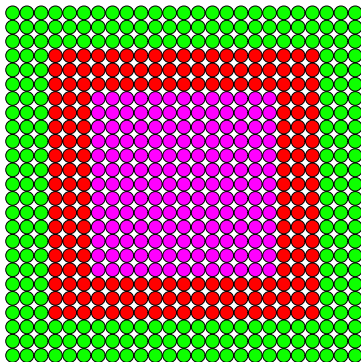
# Детерминированные переходы

Клеточные автоматы



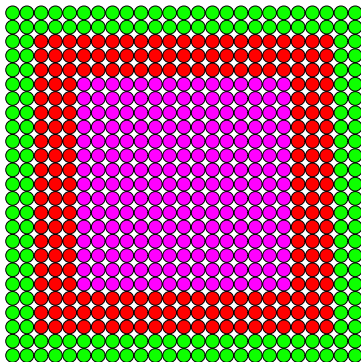
# Детерминированные переходы

Клеточные автоматы



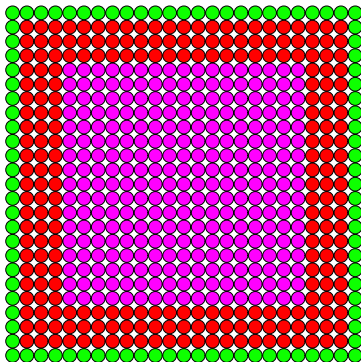
# Детерминированные переходы

Клеточные автоматы



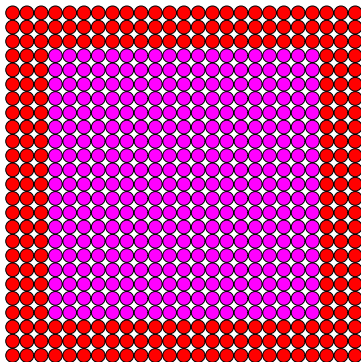
# Детерминированные переходы

## Клеточные автоматы



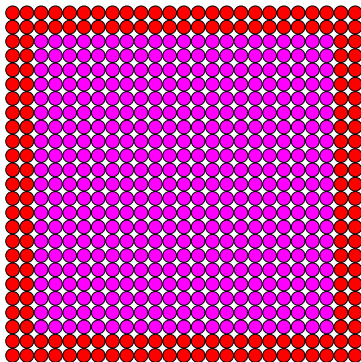
# Детерминированные переходы

Клеточные автоматы



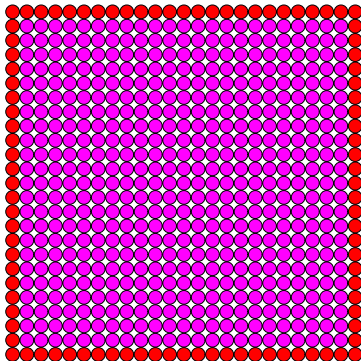
# Детерминированные переходы

Клеточные автоматы



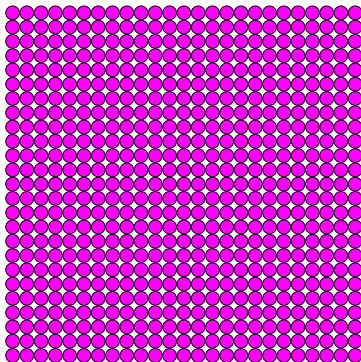
# Детерминированные переходы

Клеточные автоматы



# Детерминированные переходы

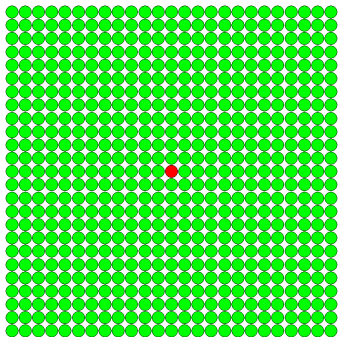
Клеточные автоматы



# Вероятностные переходы

## Перколяция

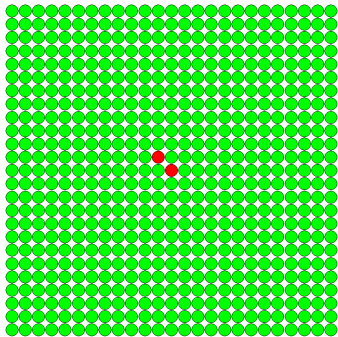
- 1 Восприимчивый к заболеванию узел  $v$  инфицируется с вероятностью  $p = k_{\text{inf}}/k_v$ , где  $k_v$  — общее число соседей узла  $v$ ,  $k_{\text{inf}}$  — количество инфицированных соседей. Узел  $v$  инфицируется с вероятностью 1, если все его соседи заражены.
- 2 Вероятность инфицирования определяется выражением  $[1 - (1 - q)^{k_{\text{inf}}}]$ , где  $q$  — вероятность заражения каждым инфицированным соседом.



# Вероятностные переходы

## Перколяция

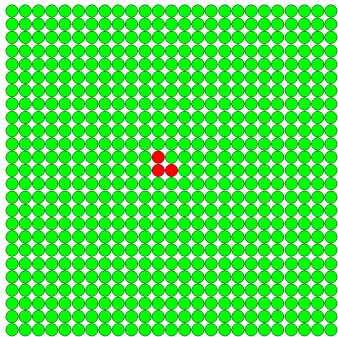
- 1 Восприимчивый к заболеванию узел  $v$  инфицируется с вероятностью  $p = k_{\text{inf}}/k_v$ , где  $k_v$  — общее число соседей узла  $v$ ,  $k_{\text{inf}}$  — количество инфицированных соседей. Узел  $v$  инфицируется с вероятностью 1, если все его соседи заражены.
- 2 Вероятность инфицирования определяется выражением  $[1 - (1 - q)^{k_{\text{inf}}}]$ , где  $q$  — вероятность заражения каждым инфицированным соседом.



# Вероятностные переходы

## Перколяция

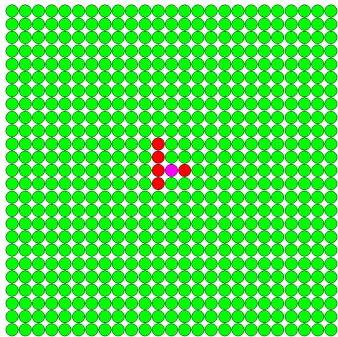
- 1 Восприимчивый к заболеванию узел  $v$  инфицируется с вероятностью  $p = k_{\text{inf}}/k_v$ , где  $k_v$  — общее число соседей узла  $v$ ,  $k_{\text{inf}}$  — количество инфицированных соседей. Узел  $v$  инфицируется с вероятностью 1, если все его соседи заражены.
- 2 Вероятность инфицирования определяется выражением  $[1 - (1 - q)^{k_{\text{inf}}}]$ , где  $q$  — вероятность заражения каждым инфицированным соседом.



# Вероятностные переходы

## Перколяция

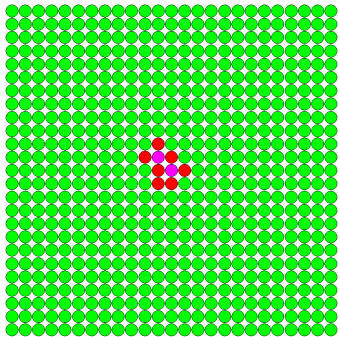
- 1 Восприимчивый к заболеванию узел  $v$  инфицируется с вероятностью  $p = k_{\text{inf}}/k_v$ , где  $k_v$  — общее число соседей узла  $v$ ,  $k_{\text{inf}}$  — количество инфицированных соседей. Узел  $v$  инфицируется с вероятностью 1, если все его соседи заражены.
- 2 Вероятность инфицирования определяется выражением  $[1 - (1 - q)^{k_{\text{inf}}}]$ , где  $q$  — вероятность заражения каждым инфицированным соседом.



# Вероятностные переходы

## Перколяция

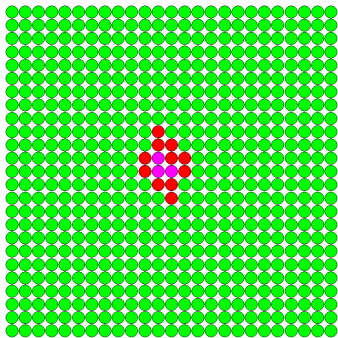
- 1 Восприимчивый к заболеванию узел  $v$  инфицируется с вероятностью  $p = k_{\text{inf}}/k_v$ , где  $k_v$  — общее число соседей узла  $v$ ,  $k_{\text{inf}}$  — количество инфицированных соседей. Узел  $v$  инфицируется с вероятностью 1, если все его соседи заражены.
- 2 Вероятность инфицирования определяется выражением  $[1 - (1 - q)^{k_{\text{inf}}}]$ , где  $q$  — вероятность заражения каждым инфицированным соседом.



# Вероятностные переходы

## Перколяция

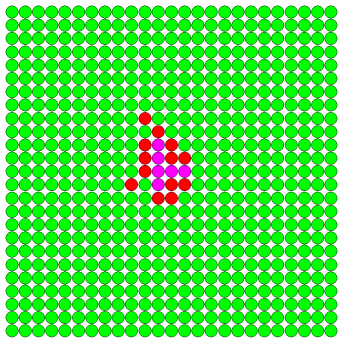
- 1 Восприимчивый к заболеванию узел  $v$  инфицируется с вероятностью  $p = k_{\text{inf}}/k_v$ , где  $k_v$  — общее число соседей узла  $v$ ,  $k_{\text{inf}}$  — количество инфицированных соседей. Узел  $v$  инфицируется с вероятностью 1, если все его соседи заражены.
- 2 Вероятность инфицирования определяется выражением  $[1 - (1 - q)^{k_{\text{inf}}}]$ , где  $q$  — вероятность заражения каждым инфицированным соседом.



# Вероятностные переходы

## Перколяция

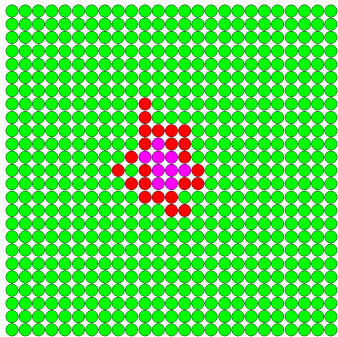
- 1 Восприимчивый к заболеванию узел  $v$  инфицируется с вероятностью  $p = k_{\text{inf}}/k_v$ , где  $k_v$  — общее число соседей узла  $v$ ,  $k_{\text{inf}}$  — количество инфицированных соседей. Узел  $v$  инфицируется с вероятностью 1, если все его соседи заражены.
- 2 Вероятность инфицирования определяется выражением  $[1 - (1 - q)^{k_{\text{inf}}}]$ , где  $q$  — вероятность заражения каждым инфицированным соседом.



# Вероятностные переходы

## Перколяция

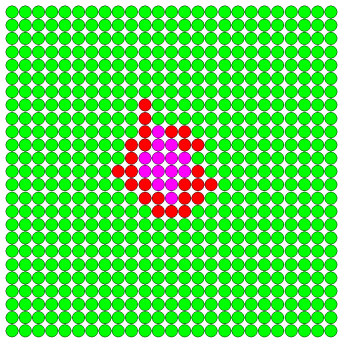
- 1 Восприимчивый к заболеванию узел  $v$  инфицируется с вероятностью  $p = k_{\text{inf}}/k_v$ , где  $k_v$  — общее число соседей узла  $v$ ,  $k_{\text{inf}}$  — количество инфицированных соседей. Узел  $v$  инфицируется с вероятностью 1, если все его соседи заражены.
- 2 Вероятность инфицирования определяется выражением  $[1 - (1 - q)^{k_{\text{inf}}}]$ , где  $q$  — вероятность заражения каждым инфицированным соседом.



# Вероятностные переходы

## Перколяция

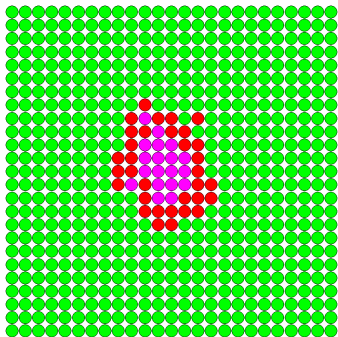
- 1 Восприимчивый к заболеванию узел  $v$  инфицируется с вероятностью  $p = k_{\text{inf}}/k_v$ , где  $k_v$  — общее число соседей узла  $v$ ,  $k_{\text{inf}}$  — количество инфицированных соседей. Узел  $v$  инфицируется с вероятностью 1, если все его соседи заражены.
- 2 Вероятность инфицирования определяется выражением  $[1 - (1 - q)^{k_{\text{inf}}}]$ , где  $q$  — вероятность заражения каждым инфицированным соседом.



# Вероятностные переходы

## Перколяция

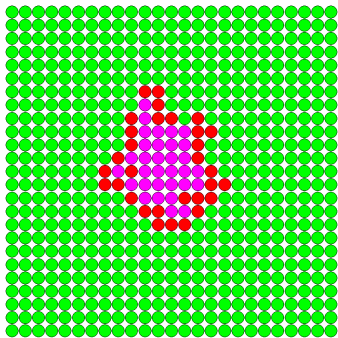
- 1 Восприимчивый к заболеванию узел  $v$  инфицируется с вероятностью  $p = k_{\text{inf}}/k_v$ , где  $k_v$  — общее число соседей узла  $v$ ,  $k_{\text{inf}}$  — количество инфицированных соседей. Узел  $v$  инфицируется с вероятностью 1, если все его соседи заражены.
- 2 Вероятность инфицирования определяется выражением  $[1 - (1 - q)^{k_{\text{inf}}}]$ , где  $q$  — вероятность заражения каждым инфицированным соседом.



# Вероятностные переходы

## Перколяция

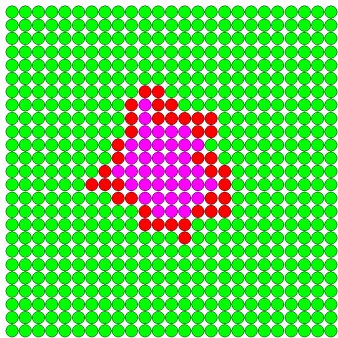
- 1 Восприимчивый к заболеванию узел  $v$  инфицируется с вероятностью  $p = k_{\text{inf}}/k_v$ , где  $k_v$  — общее число соседей узла  $v$ ,  $k_{\text{inf}}$  — количество инфицированных соседей. Узел  $v$  инфицируется с вероятностью 1, если все его соседи заражены.
- 2 Вероятность инфицирования определяется выражением  $[1 - (1 - q)^{k_{\text{inf}}}]$ , где  $q$  — вероятность заражения каждым инфицированным соседом.



# Вероятностные переходы

## Перколяция

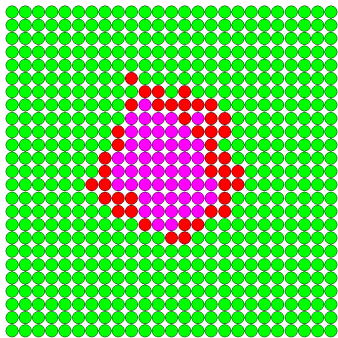
- 1 Восприимчивый к заболеванию узел  $v$  инфицируется с вероятностью  $p = k_{\text{inf}}/k_v$ , где  $k_v$  — общее число соседей узла  $v$ ,  $k_{\text{inf}}$  — количество инфицированных соседей. Узел  $v$  инфицируется с вероятностью 1, если все его соседи заражены.
- 2 Вероятность инфицирования определяется выражением  $[1 - (1 - q)^{k_{\text{inf}}}]$ , где  $q$  — вероятность заражения каждым инфицированным соседом.



# Вероятностные переходы

## Перколяция

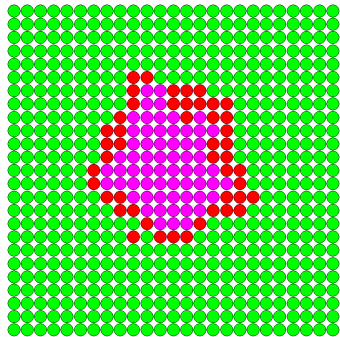
- 1 Восприимчивый к заболеванию узел  $v$  инфицируется с вероятностью  $p = k_{\text{inf}}/k_v$ , где  $k_v$  — общее число соседей узла  $v$ ,  $k_{\text{inf}}$  — количество инфицированных соседей. Узел  $v$  инфицируется с вероятностью 1, если все его соседи заражены.
- 2 Вероятность инфицирования определяется выражением  $[1 - (1 - q)^{k_{\text{inf}}}]$ , где  $q$  — вероятность заражения каждым инфицированным соседом.



# Вероятностные переходы

## Перколяция

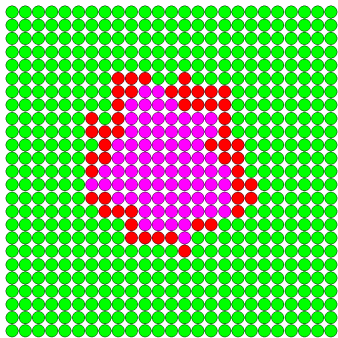
- 1 Восприимчивый к заболеванию узел  $v$  инфицируется с вероятностью  $p = k_{\text{inf}}/k_v$ , где  $k_v$  — общее число соседей узла  $v$ ,  $k_{\text{inf}}$  — количество инфицированных соседей. Узел  $v$  инфицируется с вероятностью 1, если все его соседи заражены.
- 2 Вероятность инфицирования определяется выражением  $[1 - (1 - q)^{k_{\text{inf}}}]$ , где  $q$  — вероятность заражения каждым инфицированным соседом.



# Вероятностные переходы

## Перколяция

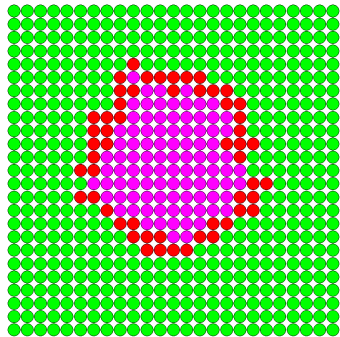
- 1 Восприимчивый к заболеванию узел  $v$  инфицируется с вероятностью  $p = k_{\text{inf}}/k_v$ , где  $k_v$  — общее число соседей узла  $v$ ,  $k_{\text{inf}}$  — количество инфицированных соседей. Узел  $v$  инфицируется с вероятностью 1, если все его соседи заражены.
- 2 Вероятность инфицирования определяется выражением  $[1 - (1 - q)^{k_{\text{inf}}}]$ , где  $q$  — вероятность заражения каждым инфицированным соседом.



# Вероятностные переходы

## Перколяция

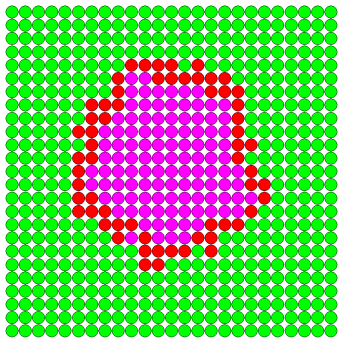
- 1 Восприимчивый к заболеванию узел  $v$  инфицируется с вероятностью  $p = k_{\text{inf}}/k_v$ , где  $k_v$  — общее число соседей узла  $v$ ,  $k_{\text{inf}}$  — количество инфицированных соседей. Узел  $v$  инфицируется с вероятностью 1, если все его соседи заражены.
- 2 Вероятность инфицирования определяется выражением  $[1 - (1 - q)^{k_{\text{inf}}}]$ , где  $q$  — вероятность заражения каждым инфицированным соседом.



# Вероятностные переходы

## Перколяция

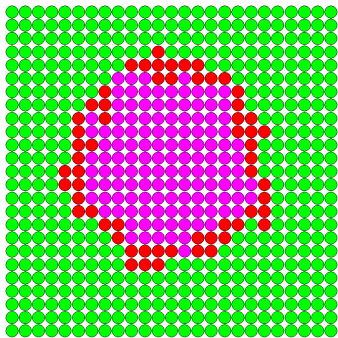
- 1 Восприимчивый к заболеванию узел  $v$  инфицируется с вероятностью  $p = k_{\text{inf}}/k_v$ , где  $k_v$  — общее число соседей узла  $v$ ,  $k_{\text{inf}}$  — количество инфицированных соседей. Узел  $v$  инфицируется с вероятностью 1, если все его соседи заражены.
- 2 Вероятность инфицирования определяется выражением  $[1 - (1 - q)^{k_{\text{inf}}}]$ , где  $q$  — вероятность заражения каждым инфицированным соседом.



# Вероятностные переходы

## Перколяция

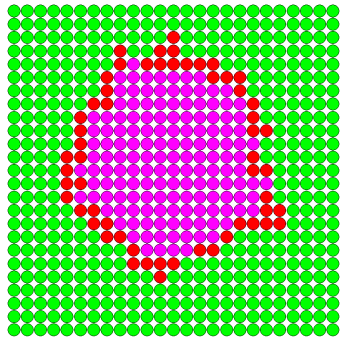
- 1 Восприимчивый к заболеванию узел  $v$  инфицируется с вероятностью  $p = k_{\text{inf}}/k_v$ , где  $k_v$  — общее число соседей узла  $v$ ,  $k_{\text{inf}}$  — количество инфицированных соседей. Узел  $v$  инфицируется с вероятностью 1, если все его соседи заражены.
- 2 Вероятность инфицирования определяется выражением  $[1 - (1 - q)^{k_{\text{inf}}}]$ , где  $q$  — вероятность заражения каждым инфицированным соседом.



# Вероятностные переходы

## Перколяция

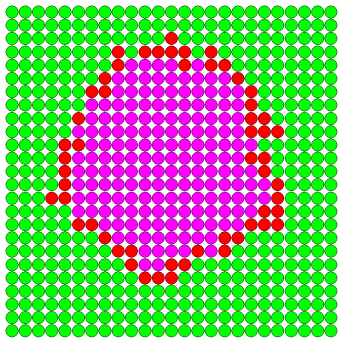
- 1 Восприимчивый к заболеванию узел  $v$  инфицируется с вероятностью  $p = k_{\text{inf}}/k_v$ , где  $k_v$  — общее число соседей узла  $v$ ,  $k_{\text{inf}}$  — количество инфицированных соседей. Узел  $v$  инфицируется с вероятностью 1, если все его соседи заражены.
- 2 Вероятность инфицирования определяется выражением  $[1 - (1 - q)^{k_{\text{inf}}}]$ , где  $q$  — вероятность заражения каждым инфицированным соседом.



# Вероятностные переходы

## Перколяция

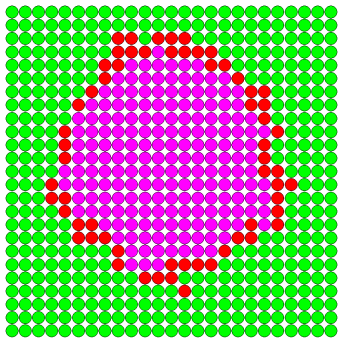
- 1 Восприимчивый к заболеванию узел  $v$  инфицируется с вероятностью  $p = k_{\text{inf}}/k_v$ , где  $k_v$  — общее число соседей узла  $v$ ,  $k_{\text{inf}}$  — количество инфицированных соседей. Узел  $v$  инфицируется с вероятностью 1, если все его соседи заражены.
- 2 Вероятность инфицирования определяется выражением  $[1 - (1 - q)^{k_{\text{inf}}}]$ , где  $q$  — вероятность заражения каждым инфицированным соседом.



# Вероятностные переходы

## Перколяция

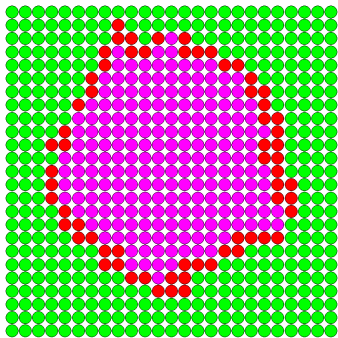
- 1 Восприимчивый к заболеванию узел  $v$  инфицируется с вероятностью  $p = k_{\text{inf}}/k_v$ , где  $k_v$  — общее число соседей узла  $v$ ,  $k_{\text{inf}}$  — количество инфицированных соседей. Узел  $v$  инфицируется с вероятностью 1, если все его соседи заражены.
- 2 Вероятность инфицирования определяется выражением  $[1 - (1 - q)^{k_{\text{inf}}}]$ , где  $q$  — вероятность заражения каждым инфицированным соседом.



# Вероятностные переходы

## Перколяция

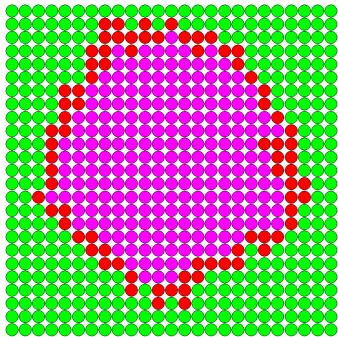
- 1 Восприимчивый к заболеванию узел  $v$  инфицируется с вероятностью  $p = k_{\text{inf}}/k_v$ , где  $k_v$  — общее число соседей узла  $v$ ,  $k_{\text{inf}}$  — количество инфицированных соседей. Узел  $v$  инфицируется с вероятностью 1, если все его соседи заражены.
- 2 Вероятность инфицирования определяется выражением  $[1 - (1 - q)^{k_{\text{inf}}}]$ , где  $q$  — вероятность заражения каждым инфицированным соседом.



# Вероятностные переходы

## Перколяция

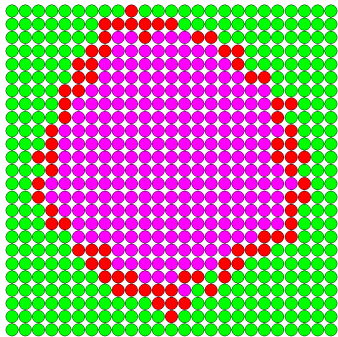
- 1 Восприимчивый к заболеванию узел  $v$  инфицируется с вероятностью  $p = k_{\text{inf}}/k_v$ , где  $k_v$  — общее число соседей узла  $v$ ,  $k_{\text{inf}}$  — количество инфицированных соседей. Узел  $v$  инфицируется с вероятностью 1, если все его соседи заражены.
- 2 Вероятность инфицирования определяется выражением  $[1 - (1 - q)^{k_{\text{inf}}}]$ , где  $q$  — вероятность заражения каждым инфицированным соседом.



# Вероятностные переходы

## Перколяция

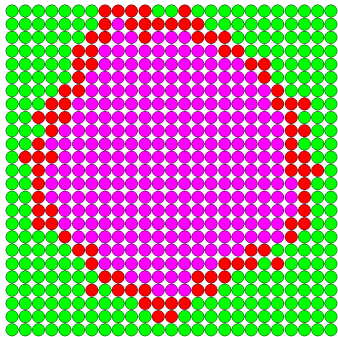
- 1 Восприимчивый к заболеванию узел  $v$  инфицируется с вероятностью  $p = k_{\text{inf}}/k_v$ , где  $k_v$  — общее число соседей узла  $v$ ,  $k_{\text{inf}}$  — количество инфицированных соседей. Узел  $v$  инфицируется с вероятностью 1, если все его соседи заражены.
- 2 Вероятность инфицирования определяется выражением  $[1 - (1 - q)^{k_{\text{inf}}}]$ , где  $q$  — вероятность заражения каждым инфицированным соседом.



# Вероятностные переходы

## Перколяция

- 1 Восприимчивый к заболеванию узел  $v$  инфицируется с вероятностью  $p = k_{\text{inf}}/k_v$ , где  $k_v$  — общее число соседей узла  $v$ ,  $k_{\text{inf}}$  — количество инфицированных соседей. Узел  $v$  инфицируется с вероятностью 1, если все его соседи заражены.
- 2 Вероятность инфицирования определяется выражением  $[1 - (1 - q)^{k_{\text{inf}}}]$ , где  $q$  — вероятность заражения каждым инфицированным соседом.

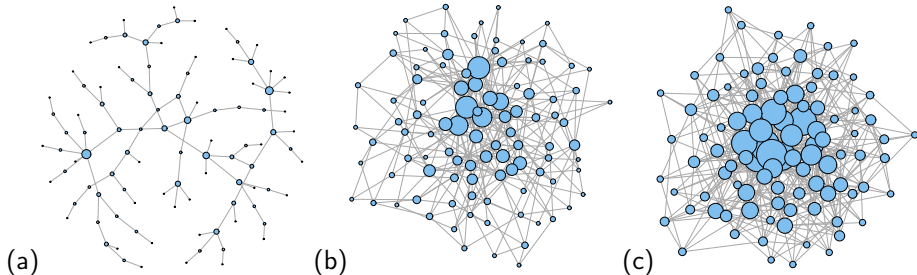


Ramírez J. E., Pajares C., Martínez M. I., Rodríguez Fernández R.,  
Molina-Gayosso E., Lozada-Lechuga J., Fernández Téllez A. Site-bond percolation  
solution to preventing the propagation of *Phytophthora* zoospores on plantations  
// *Phys. Rev. E.* — 2020. — Vol. 101. — P. 032301.

- Случайные графы (Эрдёша—Реньи).
- Безмасштабные сети.
- Малый мир (мир тесен).

## Безмасштабные сети.

Barabási, A.-L. and Albert, R. Emergence of Scaling in Random Networks // *Science* — 1999. — Vol. 286. — Num. 5439. — Pp. 509–512.



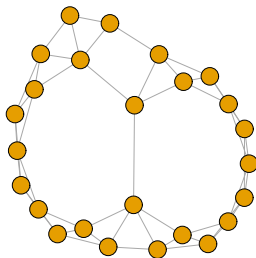
Количество узлов для всех трёх случаев равно 100.

Размер узла пропорционален количеству связей.

Средняя степень вершин (a) 1.988; (b) 5.988; (c) 9.97.

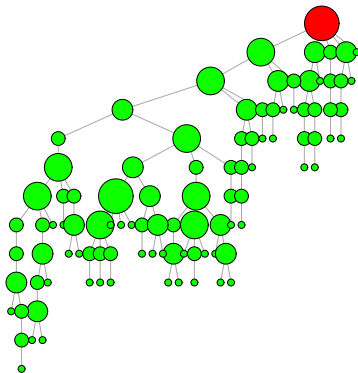
## Малый мир.

Watts D., Strogatz S. Collective dynamics of 'small-world' networks // *Nature*. — 1998. — Vol. 393. — Pp. 440–442.



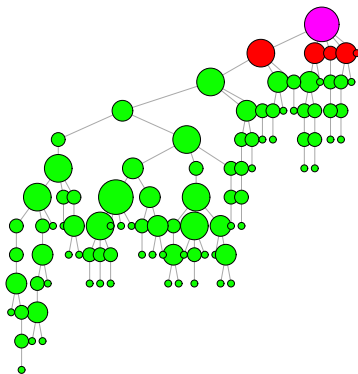
# Безмасштабные сети

## SIR



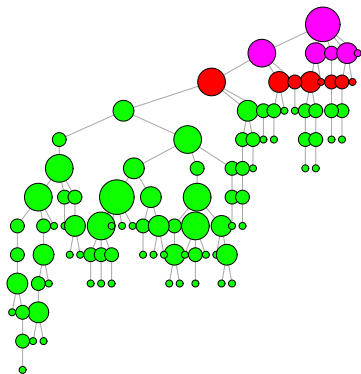
# Безмасштабные сети

## SIR



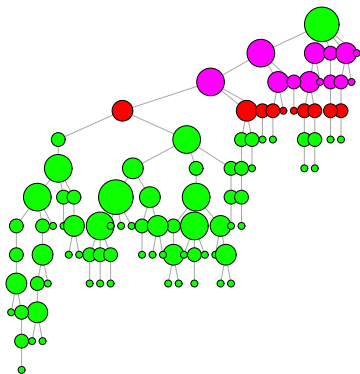
# Безмасштабные сети

## SIR



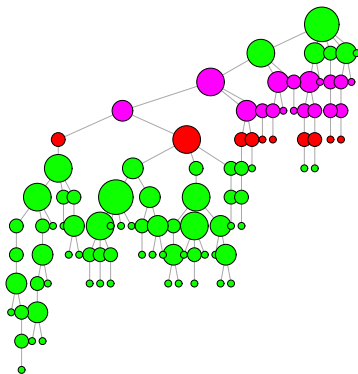
# Безмасштабные сети

## SIR



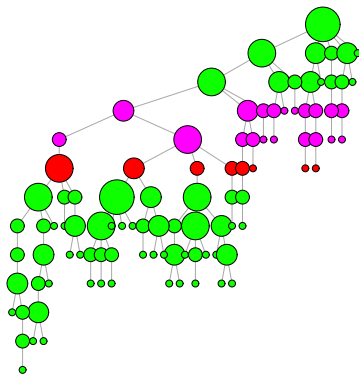
# Безмасштабные сети

## SIR



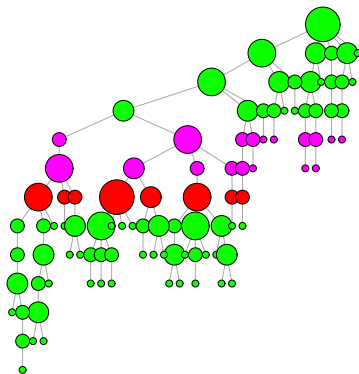
# Безмасштабные сети

## SIR



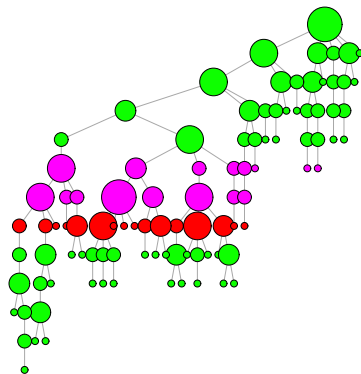
# Безмасштабные сети

## SIR



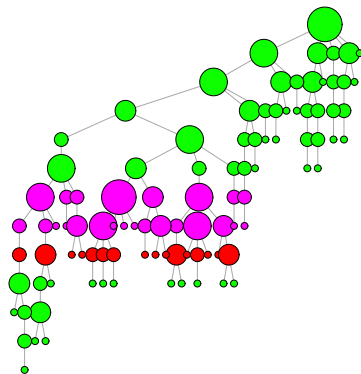
# Безмасштабные сети

## SIR



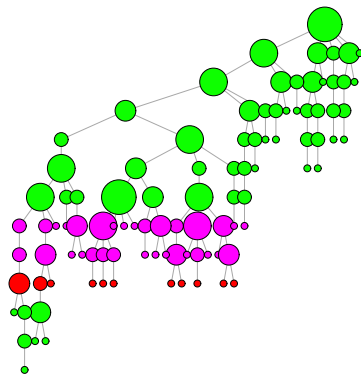
# Безмасштабные сети

## SIR



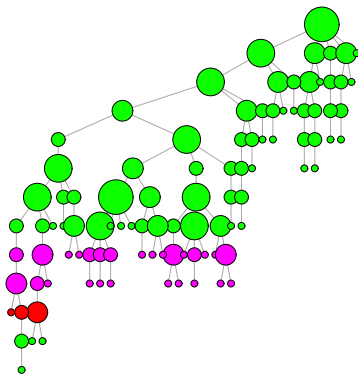
# Безмасштабные сети

## SIR



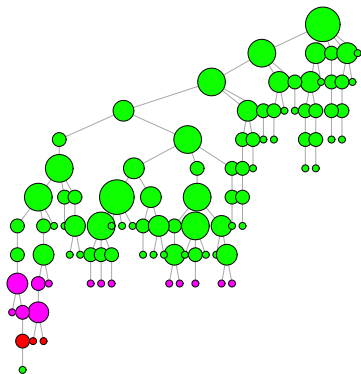
# Безмасштабные сети

## SIR



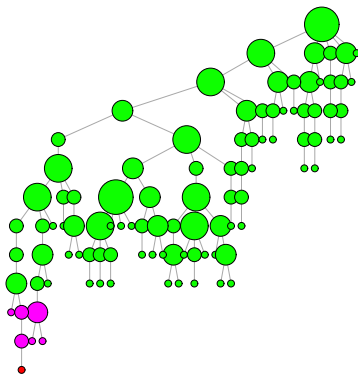
# Безмасштабные сети

## SIR



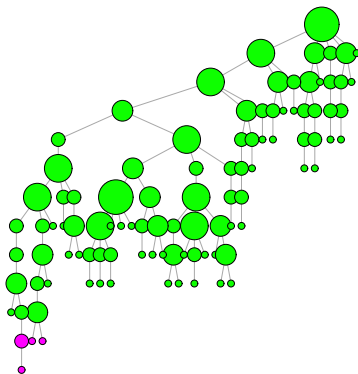
# Безмасштабные сети

## SIR



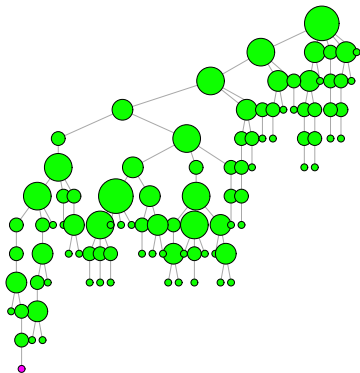
# Безмасштабные сети

## SIR



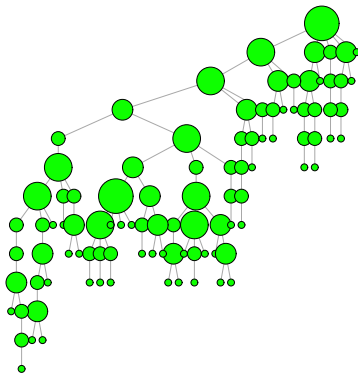
# Безмасштабные сети

## SIR

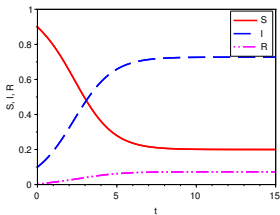


# Безмасштабные сети

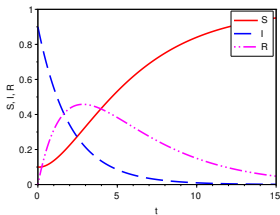
## SIR



## Точечная модель SIRS

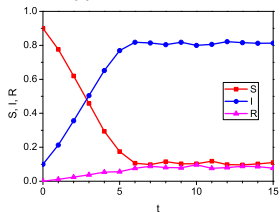


$$\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = 0.2;$$

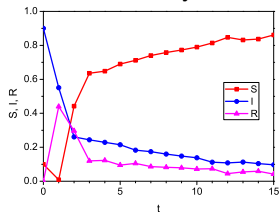


$$\alpha = 0.25, \beta = 0.1, \gamma = 0.5;$$

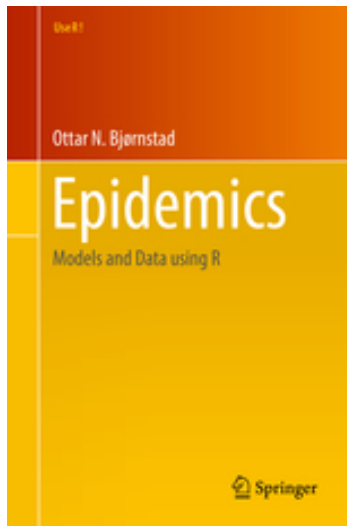
## Модель SIRS на безмасштабной сети из 1000 узлов







$$P_S = 1, AvDeg = 9.97, P_R = 0.1;$$



$$P_S = 1, AvDeg = 1.998, P_R = 0.5$$



-  Epidemic processes in complex networks / Romualdo Pastor-Satorras, Claudio Castellano, Piet Van Mieghem, Alessandro Vespignani // **Rev. Mod. Phys.** — 2015. — Aug. — Vol. 87. — P. 925–979.
-  Kuperman Marcelo N. Invited review: Epidemics on social networks // **Papers in Physics.** — 2013. — Jun. — Vol. 5. — P. 050003.
-  Keeling Matt J., Eames Ken T. D. Networks and epidemic models // **Journal of The Royal Society Interface.** — 2005. — Vol. 2, no. 4. — P. 295–307. —
-  House Thomas. Modelling epidemics on networks // **Contemporary Physics.** — 2012. — Vol. 53, no. 3. — P. 213–225. —

Спасибо за внимание!

